UNIVERSITÄT TÜBINGEN
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Geometrie
WS 2024/25

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 10

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 14.01, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 10.1 (15 + 5 Punkte) Betrachten Sie die folgende Geraden in $\mathbb{R}^2$:

$$L = \{x - y = 0\},\ L' = \{x - y = 1\},\ M = \{x + y = 0\},\ M' = \{x + y = 1\}$$

(i) Finden Sie alle Isometrien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so dass

$$f(L) = M', \qquad f(M) = L'.$$

(ii) Für alle Isometrien f im Punkt (i), bestimmen Sie ob f eine Translation, eine Drehung, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung ist.

Aufgabe 10.2 (5 + 10 + 5 Punkte) Betrachten Sie die folgende Punkte in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

und seien

$$L = L(P_1, P_2), \qquad M = L(Q_1, Q_2).$$

(i) Zeigen Sie, dass L, M zwei disjunkte Gerade sind.

(ii) Finden Sie eine projektive Transformation $f\colon \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ so dass

$$f(L) = M, \qquad f(M) = L, \qquad f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^3(\mathbb{C})}$$

Sie sollen die projektive Transformation in der Form

$$f = [A]\colon \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C}), \quad [v] \mapsto [Av]$$

durch eine explizite 4×4 Matrix $A \in GL_4(\mathbb{C})$ darstellen.

(iii) Sei $\mathrm{Fix}(f) = \{P \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \mid f(P) = P\}$. Zeigen, Sie, dass $\mathrm{Fix}(f)$ keine projektive Ebene enthält.
